

Derivada de una función en un punto

Dada una función f y un número real $a \in \text{Dom } f$, al siguiente límite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, caso de existir, se le llama

derivada de la función f en el punto a y se designa por $f'(a)$.

Si hacemos el cambio de variable $x = a + h$, el límite anterior lo podemos reescribir así: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. El

límite anterior, caso de existir, también proporciona la derivada de la función f en el punto a , $f'(a)$.

Derivadas laterales. Derivabilidad y continuidad

Se define la derivada por la izquierda de f en el punto a , de la siguiente manera:

$$f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ o bien, } f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

De manera similar, la derivada por la derecha de f en el punto a se define como

$$f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ o bien, } f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Para que exista la derivada de una función continua en un punto, sus derivadas laterales deben existir y ser iguales. Entonces decimos que **la función es derivable** en dicho punto.

Es bastante fácil demostrar que **toda función derivable en un punto es necesariamente continua en dicho punto**. Veámoslo. Para ellos supongamos que f es derivable en el punto a . Entonces tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \left(x - a \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \cdot f'(a) = 0$$

Hemos demostrado que $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$. O, lo que es lo mismo, que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, lo que demuestra que f es continua en a .

De esta propiedad se deduce que, si una función no es continua, entonces no es derivable. Es decir, solamente tiene sentido estudiar la derivabilidad en los puntos donde la función es continua.

Ejemplo

Decidir si la función $f(x) = \begin{cases} 2x+6 & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 3x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ es derivable en el punto $x = -1$.

Es muy sencillo comprobar que f es continua en $x = -1$, ya que $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 4 = f(-1)$.

Calculemos las derivadas laterales de f en el punto -1 :

$$f'(-1^-) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+6-4}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2(x+1)}{x+1} = 2.$$

$$f'(-1^+) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 3x - 4}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(x-4)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-4) = -5.$$

Como las derivadas laterales no son iguales, entonces f no es derivable en el punto -1 , es decir, no existe $f'(-1)$.

En los puntos donde una función es continua pero no es derivable (como en el caso anterior) la gráfica de la función presenta una "conexión angulosa", es decir, hay continuidad, pero no hay "suavidad" en dicho punto. El hecho de que una función sea derivable en un punto es un indicador de que en ese punto hay continuidad y "suavidad".

Interpretación geométrica de la derivada

Ya vimos el curso pasado que, geoméricamente, la derivada de una función f en un punto a , $f'(a)$, es la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de la función en el punto $(a, f(a))$.

Ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal

La ecuación de la **recta tangente** a la gráfica de la función f en el punto $(a, f(a))$ es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

La **recta normal** a la gráfica de la función f en el punto $(a, f(a))$ es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto, y su ecuación es:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Ejemplo

Hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -\frac{2x}{x-1}$ en el punto de abscisa $x=3$.

Después, obtener las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal en dicho punto.

Simplifiquemos en primer lugar el cociente $\frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$.

Para ello observemos que la imagen de f en $x=3$ es $f(3) = -\frac{2 \cdot 3}{3-1} = -\frac{6}{2} = -3$.

$$\text{Por tanto: } \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{-\frac{2x}{x-1} - (-3)}{x - 3} = \frac{-\frac{2x}{x-1} + 3}{x - 3} = \frac{-2x + 3x - 3}{x - 3} = \frac{x - 3}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{x-1}.$$

Entonces $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}$, con lo que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x=3$

es $f'(3) = \frac{1}{2}$.

Así pues, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3, f(3)) = (3, -3)$ es:

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3) \Rightarrow y - (-3) = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow$$

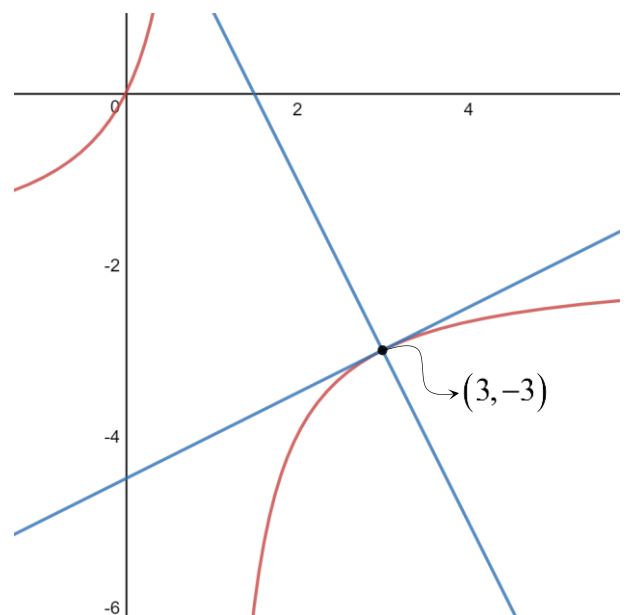
$$\Rightarrow y + 3 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}.$$

Y la recta normal en el mismo punto es:

$$y - f(3) = -\frac{1}{f'(3)}(x - 3) \Rightarrow y - (-3) = -\frac{1}{1/2}(x - 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 3 = -2(x - 3) \Rightarrow y + 3 = -2x + 6 \Rightarrow y = -2x + 3.$$

En la figura de la izquierda se pueden apreciar claramente tanto la recta tangente como normal en el punto $(3, -3)$.



Función derivada. Derivadas sucesivas

La función derivada de una función f es una nueva función f' que asocia a cada punto x la derivada $f'(x)$ en ese punto.

$$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Obsérvese que estamos usando la segunda definición de derivada para hallar la derivada de una función en un punto cualquiera x . La razón es que, quizá, esta sea más cómoda, aunque también se podría usar la primera definición.

Ejemplo

Hallar, usando la definición, la función derivada de la función $f(x) = \frac{2}{x+1}$. ¿Cuál es el valor de $f'(x)$ en los puntos

$x = -2$ y $x = 1$?

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x+h+1} - \frac{2}{x+1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2(x+1) - 2(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x+2 - 2x - 2h - 2}{h(x+h+1)(x+1)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h(x+h+1)(x+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{-2}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Ahora podemos hallar rápidamente $f'(-2)$ y $f'(1)$: $f'(-2) = \frac{-2}{(2+1)^2} = -\frac{2}{9}$, $f'(1) = \frac{-2}{(1+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.

Derivadas sucesivas y reglas de derivación

Si derivamos la función derivada obtenemos otra función que llamaremos **derivada segunda** de f , y que notaremos f'' . Análogamente podemos obtener la derivada tercera, cuarta..., y derivar n veces para obtener la derivada n -ésima de $f(x)$, que la notaremos $f^{(n)}(x)$.

Por otro lado, usando la definición de derivada de una función vista al principio de este apartado es posible demostrar las siguientes reglas de derivación.

	Función	Derivada
Derivada de un número por una función	$y = k \cdot f(x)$	$y' = k \cdot f'(x)$
Derivada de una suma o de una diferencia	$y = f(x) \pm g(x)$	$y' = f'(x) \pm g'(x)$
Derivada de un producto	$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Derivada de un cociente	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
Regla de la cadena	$y = f(g(x))$	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Usando la definición de derivada de una función también es posible hallar las derivadas de las funciones elementales conocidas: constantes, potenciales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Conocidas estas derivadas, usando las reglas de derivación, podremos derivar funciones mucho más complejas: polinómicas, racionales, con radicales y cualquier función que sea composición o combinación de las funciones anteriores. De este modo evitaremos usar la definición de derivada y podremos calcular la derivada de cualquier función de una forma mucho más rápida.

Derivada de las funciones elementales

Función	Derivada	Función compuesta	Derivada
$y = k$	$y' = 0$		
$y = x$	$y' = 1$		
$y = x^2$	$y' = 2x$		
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = [f(x)]^n$	$y' = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \frac{1}{f(x)}$	$y' = -\frac{1}{[f(x)]^2} \cdot f'(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{\ln a \cdot f(x)}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$	$y = \operatorname{sen} f(x)$	$y' = f'(x) \cos f(x)$
$y = \operatorname{cos} x$	$y' = -\operatorname{sen} x$	$y = \operatorname{cos} f(x)$	$y' = -f'(x) \operatorname{sen} f(x)$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{tg} f(x)$	$y' = f'(x) [1 + \operatorname{tg}^2(f(x))] = \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$
$y = \operatorname{arcsen} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \operatorname{arcsen} f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$y = \operatorname{arccos} x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \operatorname{arccos} f(x)$	$y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arctg} f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

En las dos primeras columnas aparecen las derivadas de las funciones elementales más usuales a este nivel de bachillerato. En las dos últimas columnas aparecen las mismas derivadas, pero referidas a otra función que no sea directamente la variable independiente x . A estas se les llama funciones compuestas. Por ejemplo, la función $y = \ln(2x + \cos x)$ es la composición de la función $y = 2x + \cos x$ con la función $y = \ln x$. Según la tabla su

derivada será: $y' = \frac{1}{2x + \cos x} \cdot (2 - \operatorname{sen} x) = \frac{2 - \operatorname{sen} x}{2x + \cos x}$. Veamos a continuación varios ejemplos de cálculo de derivadas.

Ejemplos de cálculo de derivadas

1. $y = 5x^3 - \sqrt[4]{x}$. Esta función la podemos escribir así: $y = 5x^3 - x^{\frac{1}{4}}$. Entonces:

$$y' = 5 \cdot 3x^2 - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = 15x^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x^{3/4}} = 15x^2 - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

$$2. \quad y = \frac{3+2x}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{2x^2 - (3+2x)2x}{(x^2)^2} = \frac{2x^2 - 6x - 4x^2}{x^4} = \frac{-2x^2 - 6x}{x^4} = \frac{-2(x+3)}{x^3}.$$

$$3. \quad y = 3^{-4x^2+x} \Rightarrow y' = 3^{-4x^2+x} \cdot \ln 3 \cdot (-8x+1) = (-8x+1)3^{-4x^2+x} \ln 3.$$

$$4. \quad y = \ln(5x^3) \Rightarrow y' = \frac{1}{5x^3} \cdot 15x^2 = \frac{3}{x}.$$

$$5. \quad y = \log_2(x^2 - 2x + 1) \Rightarrow y' = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x^2 - 2x + 1} \cdot (2x - 2) = \frac{2x - 2}{(x^2 - 2x + 1) \ln 2}.$$

$$6. \quad y = \operatorname{sen} 3x \cdot \ln \sqrt{x} \Rightarrow y' = 3 \cos 3x \ln \sqrt{x} + \operatorname{sen} 3x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3 \cos 3x \ln \sqrt{x} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{2x} = \frac{6x \cos 3x \ln \sqrt{x} + \operatorname{sen} 3x}{2x}.$$

$$7. \quad y = \operatorname{tg}(\sqrt[3]{x} + 5x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2(\sqrt[3]{x} + 5x)} \cdot \left(\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + 5 \right) = (1 + \operatorname{tg}^2(\sqrt[3]{x} + 5x)) \cdot \left(\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + 5 \right).$$

8. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+x}}$. La derivada de esta función la vamos a hacer de tres formas distintas.

a) Aplicando la regla de la derivada de un cociente.

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x+x}) - \sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right)}{(\sqrt{x+x})^2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} - \sqrt{x}}{(\sqrt{x+x})^2} = \frac{\frac{x-2x}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x+x})^2} = \frac{-x}{2\sqrt{x}(\sqrt{x+x})^2} = \frac{-\sqrt{x}}{2(\sqrt{x+x})^2}.$$

b) Transformando en primer lugar la función multiplicando numerador y denominador por \sqrt{x} :

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+x}} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{(\sqrt{x+x})\sqrt{x}} = \frac{x}{x+x\sqrt{x}} = \frac{x}{x(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{1+\sqrt{x}}.$$

Ahora usamos que la derivada de $y = \frac{1}{f(x)}$ es $y' = -\frac{1}{[f(x)]^2} \cdot f'(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$:

$$y = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \Rightarrow y' = -\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}.$$

Esta última expresión es igual que la expresión de la derivada obtenida en el apartado anterior, ya que

$$-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}^2(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-\sqrt{x}}{2(\sqrt{x} \cdot (1+\sqrt{x}))^2} = \frac{-\sqrt{x}}{2(\sqrt{x+x})^2}.$$

c) Transformando en primer lugar la función multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{x-x}$:

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-x})}{(\sqrt{x+x})(\sqrt{x-x})} = \frac{x-x\sqrt{x}}{x-x^2} = \frac{x(1-\sqrt{x})}{x(1-x)} = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}.$$

Y ahora derivamos esta última expresión usando la regla de derivación de un cociente:

$$y = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \Rightarrow y' = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x) - (1-\sqrt{x})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{x}{2\sqrt{x}} + 1 - \sqrt{x}}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{-1+x+2\sqrt{x}-2x}{2\sqrt{x}(1-x)^2} = \frac{-1-x+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1-x)^2} = -\frac{1+x-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1-x)^2}.$$

Esta última expresión también es igual que la expresión de la derivada obtenida en el apartado a), ya que

$$-\frac{1+x-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1-x)^2} = -\frac{(1-\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}(1-x)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \right)^2 = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x} \right)^2 = \frac{-\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+x)^2}.$$

9. $y = \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}$. La derivada de esta función, al igual que la anterior, se podría hacer de varias formas. La vamos a

hacer de dos formas distintas.

a) En la primera de ellas transformamos la función, derivamos directamente y simplificamos:

$$y = \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{x}{x^{1/2}} = 1 + x^{1/2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} x^{1/2-1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x}.$$

b) En la segunda forma usaremos la regla de derivación de un cociente:

$$y = \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}} \Rightarrow y' = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)\sqrt{x} - (\sqrt{x}+x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{x} - \frac{1}{2} - \frac{x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\sqrt{x} - \frac{x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x-x}{2x\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{2x-x}{2x\sqrt{x}} = \frac{x}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x}.$$

Podrías probar a hacer esta derivada de más formas distintas y comprobar que se obtiene el mismo resultado.

10. $y = xe^{-x^2} \Rightarrow y' = 1 \cdot e^{-x^2} + x(e^{-x^2} \cdot (-2x)) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(1-2x^2).$

11. Ahora, usando el apartado anterior, podemos estudiar la derivabilidad en $x=0$, de la siguiente función definida

por trozos: $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ xe^{-x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Para ello vamos a calcular las derivadas por la izquierda y por la derecha

del punto $x=0$:

- Si $x > 0$, $f(x) = e^x - 1$ y entonces $f'(x) = e^x$.
- Si $x < 0$, $f(x) = xe^{-x^2}$ y entonces, por el apartado anterior, $f'(x) = e^{-x^2}(1-2x^2)$.

Por tanto, podemos escribir $f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ e^{-x^2}(1-2x^2) & \text{si } x < 0 \end{cases}$. De aquí obtenemos que $f'(0^-) = e^0 = 1$ y que

$f'(0^+) = e^{-0^2}(1-2 \cdot 0^2) = e^0 \cdot 1 = 1$. Como $f'(0^+) = f'(0^-) = 1$, hemos demostrado que la función f es derivable en $x=0$ y $f'(0) = 1$. Además, la recta tangente en $x=0$ será $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y = x$.

12. $y = \cos^2(x^2+1) \Rightarrow y' = 2\cos(x^2+1) \cdot (-\text{sen}(x^2+1)) \cdot 2x = -4x\cos(x^2+1)\text{sen}(x^2+1).$

13. $y = x^3 - \arccos x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3x^2\sqrt{1-x^2} + 2x}{\sqrt{1-x^2}}.$

$$14. \quad y = \ln\left(\frac{2x+1}{1-2x}\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{\frac{2x+1}{1-2x}} \cdot \frac{2(1-2x) - (2x+1)(-2)}{(1-2x)^2} = \frac{1-2x}{2x+1} \cdot \frac{2-4x+4x+2}{(1-2x)^2} = \frac{4}{(2x+1)(1-2x)} = \frac{4}{1-4x^2}.$$

Esta derivada la podemos hacer de otra manera. Si escribimos $y = \ln\left(\frac{2x+1}{1-2x}\right) = \ln(2x+1) - \ln(1-2x)$, se tiene

$$\text{que } y' = \frac{2}{2x+1} - \frac{-2}{1-2x} = \frac{2(1-2x) + 2(2x+1)}{(2x+1)(1-2x)} = \frac{2-4x+4x+2}{1-4x^2} = \frac{4}{1-4x^2}.$$

$$15. \quad y = \ln(\sqrt{5x+3}) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{5x+3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x+3}} \cdot 5 = \frac{5}{2(5x+3)}.$$

Al igual que en el ejemplo anterior podemos escribir $y = \ln(\sqrt{5x+3}) = \ln(5x+3)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln(5x+3)$. Entonces:

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5x+3} \cdot 5 = \frac{5}{2(5x+3)}.$$

$$16. \quad y = \ln\left(\sqrt{\frac{2x+1}{1-2x}}\right). \text{ Vamos a reescribir esta función antes de hacer la derivada.}$$

$$y = \ln\left(\sqrt{\frac{2x+1}{1-2x}}\right) = \ln\left(\frac{2x+1}{1-2x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2x+1}{1-2x}\right) = \frac{1}{2} (\ln(2x+1) - \ln(1-2x)). \text{ Entonces tenemos que:}$$

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2x+1} - \frac{-2}{1-2x} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2-4x+4x+2}{(2x+1)(1-2x)} = \frac{4}{2(4x^2-1)} = \frac{2}{4x^2-1}$$

Esta forma de derivar es más sencilla que si directamente empezamos a derivar la función original haciendo uso de la regla de la cadena. Pero a veces no ocurre así y es mejor derivar la función antes de escribirla de otra manera. En el siguiente ejemplo vemos un caso de este tipo.

$$17. \quad y = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}. \text{ Vamos a hacer la derivada de esta función de dos formas distintas.}$$

a) En la primera de ellas derivamos directamente haciendo uso de la regla de la derivada de una diferencia:

$$y = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \Rightarrow y' = -\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{(x-1)^2} \cdot 1 \right) = -\frac{1}{x \ln^2 x} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1)^2 + x \ln^2 x}{x(x-1)^2 \ln^2 x}.$$

b) En la segunda forma vamos a transformar la función y luego usaremos la regla de derivación de un cociente.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} \Rightarrow y' = \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)(x-1)\ln x - (x-1-\ln x)\left(\ln x + (x-1)\frac{1}{x}\right)}{\left((x-1)\ln x\right)^2} = \\ &= \frac{\left(x-1-1+\frac{1}{x}\right)\ln x - (x-1-\ln x)\left(\ln x + 1-\frac{1}{x}\right)}{\left((x-1)\ln x\right)^2} = \\ &= \frac{x \ln x - 2 \ln x + \frac{\ln x}{x} - \left(x \ln x + x-1-\ln x-1+\frac{1}{x} - \ln^2 x - \ln x + \frac{\ln x}{x}\right)}{\left((x-1)\ln x\right)^2} = \\ &= \frac{-x+2-\frac{1}{x}+\ln^2 x}{\left((x-1)\ln x\right)^2} = \frac{-x^2+2x-1+x \ln^2 x}{x(x-1)^2 \ln^2 x} = \frac{-(x^2-2x+1)+x \ln^2 x}{x(x-1)^2 \ln^2 x} = \frac{-(x-1)^2+x \ln^2 x}{x(x-1)^2 \ln^2 x}. \end{aligned}$$

Ni que decir tiene que la primera forma es mucho más sencilla que esta segunda. Habitualmente, cuando una función esté expresada como suma o diferencia de otras dos o más, es mejor aplicar directamente la derivada de una suma o de una diferencia.

$$18. y = \sqrt{x^2 \ln x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 \ln x}} \left(2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} \right) = \frac{2x \ln x + x}{2\sqrt{x^2 \ln x}}.$$

$$19. y = \frac{e^{3x} - x}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{(3e^{3x} - 1)x^2 - (e^{3x} - x)2x}{(x^2)^2} = \frac{3x^2 e^{3x} - x^2 - 2xe^{3x} + 2x^2}{x^4} = \frac{3x^2 e^{3x} - 2xe^{3x} + x^2}{x^4} =$$

$$= \frac{x(3xe^{3x} - 2e^{3x} + x)}{x^4} = \frac{3xe^{3x} - 2e^{3x} + x}{x^3}.$$

$$20. y = \sqrt{x\sqrt{x+1}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x\sqrt{x+1}}} \cdot \left(1 \cdot \sqrt{x+1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x^2(x+1)}} \cdot \frac{2(x+1) + x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{4\sqrt{x^2(x+1)^3}}.$$

$$21. y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x - x \ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{x(2 - \ln x)}{2x^2\sqrt{x}} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}.$$

$$22. y = \ln \left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} \right) \Rightarrow y' = \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} \cdot \frac{\cos x(1 - \operatorname{sen} x) - (1 + \operatorname{sen} x)(-\cos x)}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} \cdot \frac{\cos x - \cos x \operatorname{sen} x + \cos x + \cos x \operatorname{sen} x}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} \cdot \frac{2 \cos x}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} = \frac{2 \cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x)} =$$

$$= \frac{2 \cos x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{2 \cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x}.$$

$$23. y = \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{x+1} \right) \Rightarrow y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x+1} \right)^2} \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(x+1)^2}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{\frac{(x+1)^2 + x^2}{(x+1)^2}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2x^2 + 2x + 1} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{2x^2 + 2x + 1}.$$

$$24. y = \frac{x^2 - \cos x}{\ln(x+1)} \Rightarrow y' = \frac{(2x - (-\operatorname{sen} x)) \cdot \ln(x+1) - (x^2 - \cos x) \cdot \frac{1}{x+1}}{\ln^2(x+1)} =$$

$$= \frac{(x+1)(2x + \operatorname{sen} x) \ln(x+1) - x^2 + \cos x}{(x+1) \ln^2(x+1)}. \text{ En este caso no podemos simplificar mucho más la derivada.}$$

$$25. y = \operatorname{arcsen} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2}} \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x+1)^2}}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{4x}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}.$$

Derivación logarítmica

La derivación logarítmica es una técnica de derivación que se utiliza al derivar una función cuya expresión es, a su vez, una función elevada a otra función, es decir, cuando hemos de derivar una función de la forma $y = f(x)^{g(x)}$.

La técnica de la derivación logarítmica consiste en tomar logaritmos en ambos miembros de la igualdad y luego derivar. En otras palabras, como $y = f(x)^{g(x)}$ tenemos también que $\ln y = \ln f(x)^{g(x)}$. Usando la propiedad de los logaritmos según la cual el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base, tenemos que $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$. Derivando ahora en los dos miembros de la igualdad tenemos:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Obsérvese que para derivar $\ln y$, al ser y una función que depende de x , hemos de hacer uso de la regla de la cadena, con lo que la derivada de $\ln y$ es $\frac{1}{y} \cdot y'$. Para derivar el segundo miembro se ha utilizado la regla de derivación del producto. Ahora, despejando y de la expresión anterior tenemos:

$$y' = y \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \right) = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)} \right)$$

Como la regla anterior no es fácil de recordar, lo mejor es seguir el proceso para derivar funciones en las que la variable independiente aparece tanto en la base como en el exponente. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos

Vamos a derivar las siguientes funciones: $y = (\sqrt{x})^x$, $y = x^{\cos x}$, $y = (1+x)^{\ln x}$, $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$.

$$1. \quad y = (\sqrt{x})^x \Rightarrow \ln y = \ln(\sqrt{x})^x \Rightarrow \ln y = x \ln \sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \ln \sqrt{x} + \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow y' = y \left(\ln \sqrt{x} + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow y' = (\sqrt{x})^x \left(\ln \sqrt{x} + \frac{1}{2} \right).$$

$$2. \quad y = x^{\cos x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{\cos x} \Rightarrow \ln y = \cos x \ln x \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = -\operatorname{sen} x \ln x + \cos x \frac{1}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow y' = y \left(\frac{\cos x}{x} - \operatorname{sen} x \ln x \right) \Rightarrow y' = x^{\cos x} \left(\frac{\cos x}{x} - \operatorname{sen} x \ln x \right).$$

$$3. \quad y = (1+x)^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln(1+x)^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln x \ln(1+x) \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x} \ln(1+x) + \ln x \frac{1}{1+x} \Rightarrow \\ \Rightarrow y' = y \left(\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln x}{1+x} \right) \Rightarrow y' = (1+x)^{\ln x} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln x}{1+x} \right).$$

$$4. \quad y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x \Rightarrow \ln y = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x \Rightarrow \ln y = x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x \cdot \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \frac{x(x-1)}{x+1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \frac{-2x}{x^2-1} \Rightarrow y' = y \left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{2x}{x^2-1} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow y' = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x \left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{2x}{x^2-1} \right).$$

Derivación de funciones en forma implícita

Hay relaciones entre variables cuya expresión analítica no es de la forma $y = f(x)$. Es decir, la variable dependiente y no aparece despejada o de forma explícita. Se dice que **la función está dada de forma implícita** mediante una relación de la forma $f(x, y) = 0$.

En muchos de estos casos es difícil o muy laborioso aislar o despejar la variable dependiente y en función de la independiente x . Pero podemos realizar la derivada de la función tal y como está escrita en forma implícita, aplicando la regla de la cadena, y teniendo en cuenta que derivamos respecto de la variable independiente, que en nuestro caso es x . Para ello tendremos en cuenta que la derivada de y es y' , y la derivada de x es 1.

Ejemplos

1. Derivar, usando el método de derivación implícita, $xy^2 + y = 1$.

Suponemos, como se ha explicado anteriormente, que y depende de x , con lo que derivando término a término, tenemos: $1 \cdot y^2 + x2yy' + y' = 1 \Rightarrow y^2 + 2xyy' + y' = 0$. Ahora podemos despejar y' con facilidad:

$$2xyy' + y' = -y^2 \Rightarrow y'(2xy + 1) = -y^2 \Rightarrow y' = \frac{-y^2}{2xy + 1}$$

2. Calcular la recta tangente a la gráfica de la función dada en forma implícita $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$ en los puntos de abscisa $x = 3$.

Es evidente que despejar y en función de x no es fácil. Por tanto, derivamos en forma implícita la ecuación, con

lo que tenemos que $2x + 2yy' - 6y' = 0 \Rightarrow 2x + (2y - 6)y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-2x}{2y - 6} \Rightarrow y' = \frac{-x}{y - 3}$.

Para $x = 3$ se tiene que $9 + y^2 - 6y - 16 = 0 \Rightarrow y^2 - 6y - 7 = 0$. Entonces, para averiguar las ordenadas de los puntos en los que hemos de hallar la recta tangente, hemos de resolver la ecuación de segundo grado anterior. Sus soluciones son $y = -1$, $y = 7$. Por tanto, los puntos en los que debemos calcular la tangente son $(3, -1)$ y $(3, 7)$.

Sabemos que la ecuación de la recta tangente en un punto $(a, f(a))$ es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

En el punto $(3, -1)$ tenemos que $y' = \frac{-3}{-1 - 3} = \frac{3}{4}$,

con lo que la recta tangente en este punto será:

$$y + 1 = \frac{3}{4}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{13}{4}$$

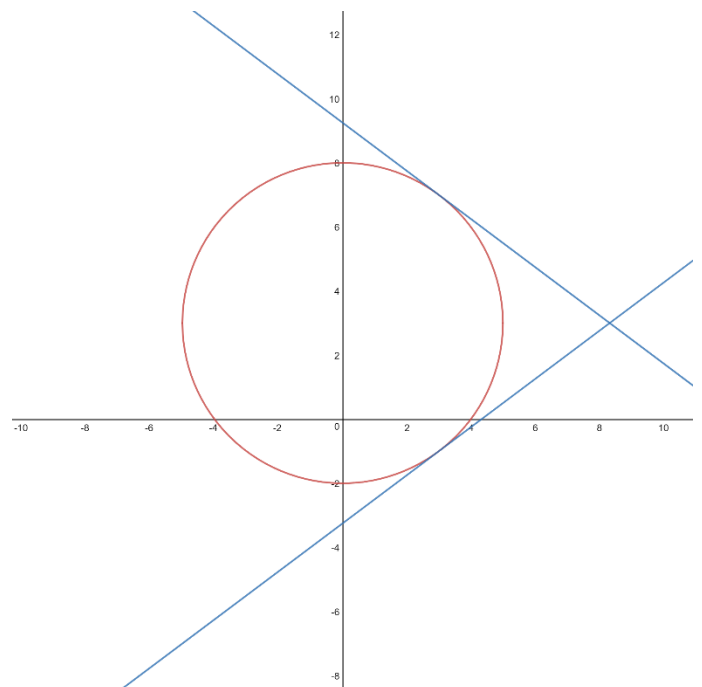
En el punto $(3, 7)$ tenemos que $y' = \frac{-3}{7 - 3} = -\frac{3}{4}$, con

lo que la recta tangente en este punto será:

$$y - 7 = -\frac{3}{4}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{37}{4}$$

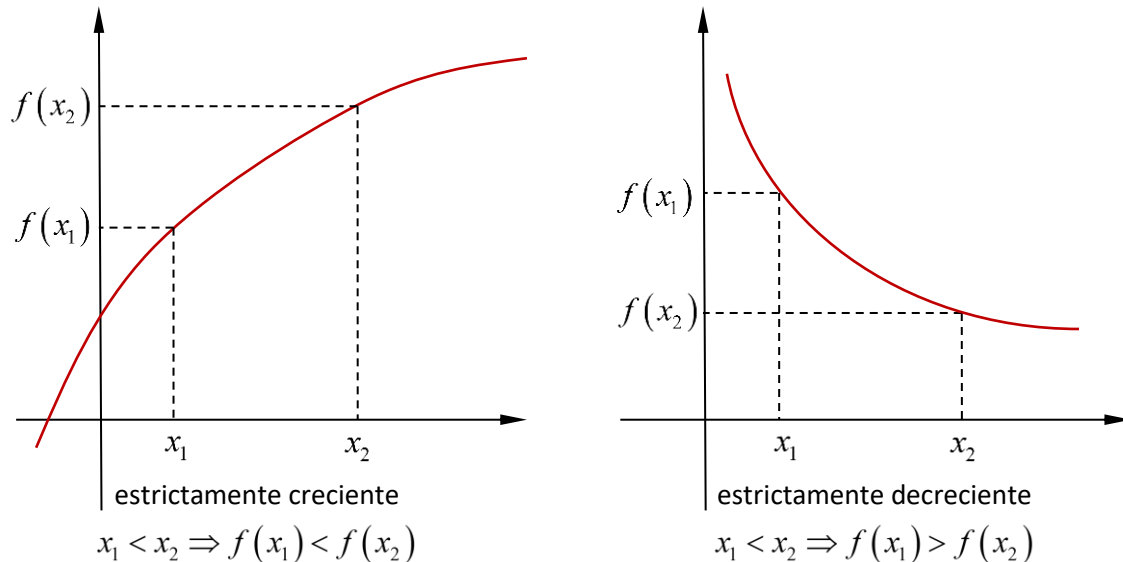
Desde el punto de vista geométrico, la ecuación $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$ es una circunferencia.

En la figura de la derecha puedes ver la circunferencia y las dos rectas tangentes en los puntos $(3, -1)$ y $(3, 7)$.



Monotonía y extremos relativos de una función

Las derivadas proporcionan información sobre la **monotonía** de una función, es decir, en qué intervalos es creciente o en qué intervalos es decreciente. La idea intuitiva de crecimiento y decrecimiento es muy clara. Formalizarla cuesta algo más: una función f definida en un intervalo, es **estrictamente creciente** si las imágenes conservan el orden de los originales, y es **estrictamente decreciente** si las imágenes invierten el orden de los originales (ver figura).

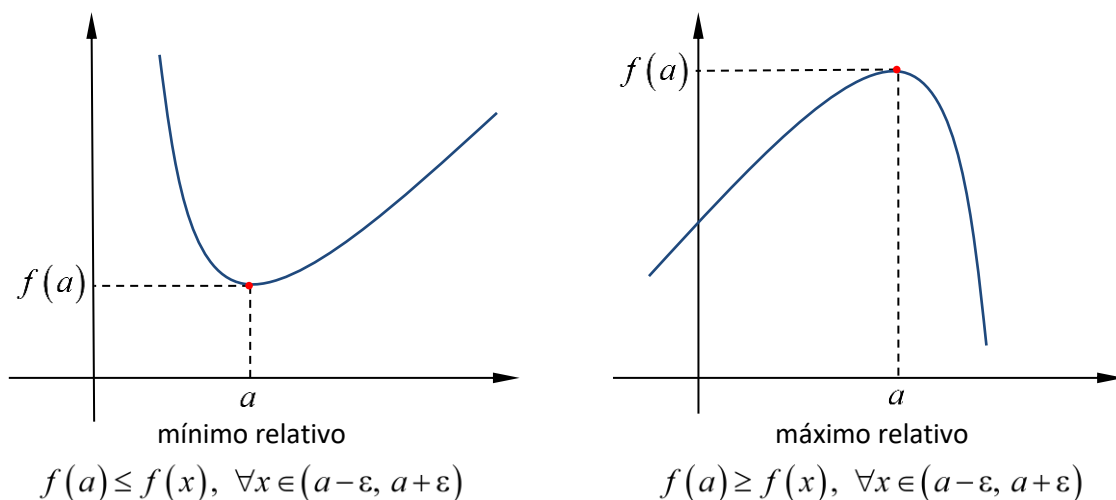


Se dice que una función es **constante** en un intervalo si las imágenes permanecen constantemente iguales en ese intervalo. La gráfica se tratará pues de una recta horizontal. Es decir, la función será de la forma $f(x) = k$, donde k es un número real fijo, para todo x del intervalo mencionado.

A veces, abusando del lenguaje, diremos que una función es creciente en vez de estrictamente creciente y se denotará simbólicamente con dos flechas hacia arriba: $\uparrow\uparrow$. Del mismo modo diremos que una función es decreciente en vez de estrictamente decreciente y se denotará simbólicamente con dos flechas hacia abajo: $\downarrow\downarrow$.

En los puntos donde la función pase de ser decreciente a creciente diremos que hay un **mínimo relativo**, y en los puntos donde la función pase de ser creciente a decreciente diremos que hay un **máximo relativo**. Otra vez, la idea intuitiva de máximo y mínimo es clara, pero hemos de formalizarla desde el punto de vista matemático: una función alcanza en un punto un **mínimo relativo** si su imagen es menor o igual que la de todos los puntos de su alrededor, y alcanza un **máximo relativo** si su imagen es mayor o igual que la de todos los puntos que están a su alrededor.

En la siguiente figura tienes la definición matemática de mínimo relativo y de máximo relativo en un punto $(a, f(a))$



En el siguiente resultado se pone de manifiesto la relación entre las derivadas y la monotonía y los extremos relativos.

Supongamos que f es una función definida en un intervalo y derivable en ese intervalo. Entonces:

- Si $f'(x) > 0$ en todo punto x del intervalo, entonces f es estrictamente creciente en ese intervalo.
- Si $f'(x) < 0$ en todo punto x del intervalo, entonces f es estrictamente decreciente en ese intervalo.
- Si f alcanza un máximo o un mínimo relativo en un punto a del intervalo, entonces $f'(a) = 0$.

En la práctica

Para estudiar la monotonía y los extremos relativos de una función f , se procede de la siguiente manera:

a) Se excluyen del estudio los siguientes puntos:

- Los **puntos que no pertenecen al dominio de la función** (puntos de discontinuidad de f , que también lo son de f' , pues si una función no es continua en un punto tampoco es derivable en el mismo).
- Los **puntos en los que no esté definida la derivada** (el resto de puntos de discontinuidad de f').
- Los puntos de f que hacen que su derivada sea igual a cero: $x \in \mathbb{R}$ tales que $f'(x) = 0$. Estos puntos reciben el nombre de **puntos críticos o singulares** de f .

b) Se divide la recta real \mathbb{R} en distintos intervalos, separados por los puntos anteriores. Es posible demostrar que en cada uno de estos intervalos el signo de f' no cambia. Por tanto, según el resultado anterior, f es siempre estrictamente creciente, o estrictamente decreciente, en cada uno de ellos.

c) Teniendo en cuenta lo anterior, construimos una tabla donde las columnas serán dichos intervalos y los puntos que los separan. Añadimos una fila para los signos de f' y otra para la monotonía de f .

d) En los puntos que separan los intervalos, si no son puntos de discontinuidad de f , observamos la monotonía de f a la izquierda y a la derecha. Si hay cambio de estrictamente decreciente a estrictamente creciente, o de estrictamente creciente a estrictamente decreciente, tendremos respectivamente un mínimo o un máximo relativo, en dicho punto.

Ejemplo

Como ejemplo estudiaremos la monotonía y los extremos relativos de la función $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$.

El dominio de f es $\mathbb{R} - \{0\}$ ya que $x=0$ anula el denominador. Entonces $x=0$ es un punto de discontinuidad de f .

De hecho, en $x=0$ hay una asíntota vertical:
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)^3}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+1)^3}{x^2} = +\infty \end{cases}.$$

Ahora derivamos la función:
$$f'(x) = \frac{3(x+1)^2 x^2 - (x+1)^3 2x}{(x^2)^2} = \frac{x(x+1)^2 (3x - 2(x+1))}{x^4} = \frac{(x+1)^2 (x-2)}{x^3}.$$

Observación de importancia

Es **de extrema importancia** simplificar adecuadamente la derivada. Para ello se recomienda extraer factor común y expresar, siempre que se pueda, tanto el numerador como el denominador, como producto de factores. Así será siempre mucho más fácil tanto resolver la ecuación $f'(x) = 0$, que es la que posibilita extraer los **puntos críticos o singulares**, como estudiar el signo de la derivada, para conocer el crecimiento o decrecimiento de la función.

Está claro que $x=0$ también es un punto de discontinuidad de f' ya que en este punto no está definida la derivada. Veamos ahora los puntos que anulan la derivada y así obtendremos los **puntos críticos o singulares**.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3} \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \\ x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$$

Así pues, los puntos obtenidos para dividir la recta real son $x = 0$ (que no pertenecía al dominio ni de f ni de f' , es decir, **puntos de discontinuidad de la función y de su derivada**), y estos dos últimos, los **puntos críticos o singulares**: $x = -1$ y $x = 2$.

Construimos pues una tabla tal y como se ha explicado en el procedimiento anterior:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	+	0	+	no existe	-	0	+
f	↑↑	no es ni máximo ni mínimo	↑↑	no existe	↓↓	máximo	↑↑

Los signos de la derivada se han obtenido dando un valor cualquiera a f' dentro del intervalo. Así, para el intervalo $(-\infty, -1)$, escogemos un número que pertenezca a dicho intervalo, por ejemplo -2 , y evaluamos la derivada en dicho punto:

$$f'(-2) = \frac{(-2+1)^2(-2-2)}{(-2)^3} = \frac{1 \cdot (-4)}{-8} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2} > 0.$$

Es conveniente destacar que lo importante no es el resultado en sí ($1/2$ en este caso), sino su signo, que es positivo (obsérvese que hemos colocado un signo $+$ en la tabla). Por tanto, como la derivada es positiva, la función es estrictamente creciente ($\uparrow\uparrow$) en el intervalo $(-\infty, -1)$. De la misma forma se procede con el resto de intervalos.

En el punto $x = -1$ no hay ni máximo ni mínimo porque la función es creciente tanto a la izquierda como a la derecha del mismo. Estos son los puntos donde la función es probable que cambie de curvatura (llamados, en su caso **puntos de inflexión**).

En el punto $x = 2$ hay un máximo relativo porque la función pasa de ser decreciente a ser creciente. Si en la función original f , hallamos el valor numérico para $x = 2$, obtendremos la coordenada y del máximo relativo:

$$f(2) = \frac{(2+1)^3}{2^2} = \frac{27}{4} = 6,75. \text{ Esto quiere decir que las coordenadas del máximo relativo son } (2, 6,75).$$

Con estos datos y algunos más que ya son conocidos (cálculo de asíntotas y puntos de corte con los ejes), se puede realizar una muy buena representación gráfica de la función.

Recuerda que ya habíamos obtenido que la recta $x = 0$ (el eje Y) es una asíntota vertical (por eso, en la tabla se escribe "no existe" en la columna correspondiente al valor 0).

En este caso, además, la función no tiene asíntotas horizontales pues $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3}{x^2} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}$,

pero esta información, sin embargo, nos proporciona la tendencia de la función hacia menos infinito y hacia más infinito.

Veamos si hay alguna asíntota oblicua de la forma $y = mx + n$: $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3}{x^3} = 1;$

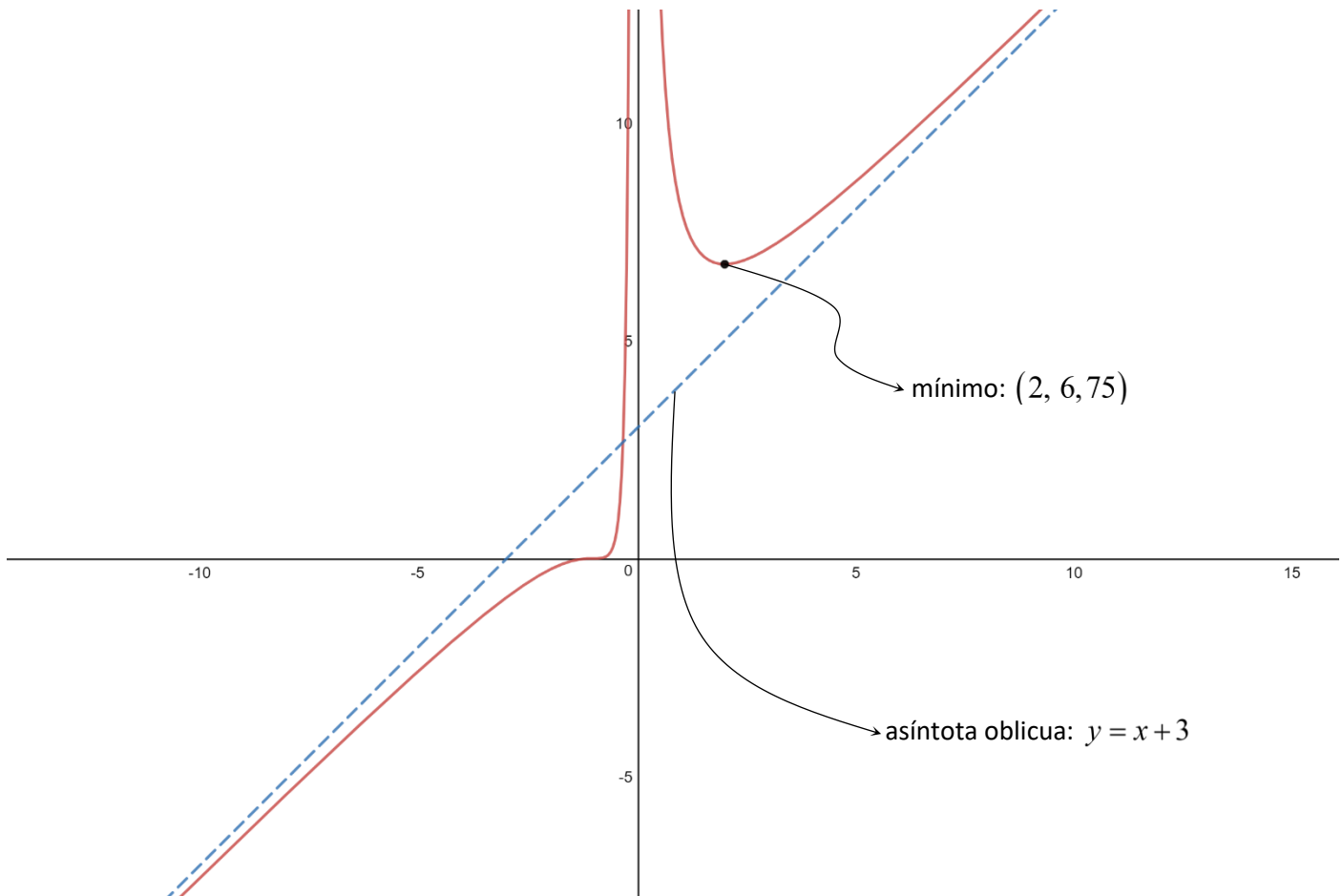
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+1)^3}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 3x + 1}{x^2} = 3.$$

Por tanto, la asíntota oblicua es $y = x + 3$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

- Con el eje X . Igualamos la imagen a 0: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Por tanto, el punto de corte con el eje X es el $(-1, 0)$.
- Con el eje Y . Tenemos que hallar la imagen para $x = 0$. Pero $f(0) = \frac{(0+1)^3}{0^2} = \frac{1}{0}$ y esto es imposible (recuerda que el dominio de la función f era $\mathbb{R} - \{0\}$). Así pues, no hay puntos de corte con el eje Y .

Con todo lo anterior, la representación gráfica de la función queda de la siguiente manera:



Criterio de la segunda derivada para la obtención de máximos y mínimos relativos

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.

En el ejemplo anterior, es posible demostrar que la segunda derivada de f es $f''(x) = \frac{6(x+1)}{x^4}$ (¿te atreves a comprobarlo?). Ya sabíamos que los dos "candidatos" a extremos relativos son $x = -1$ y $x = 2$. Entonces:

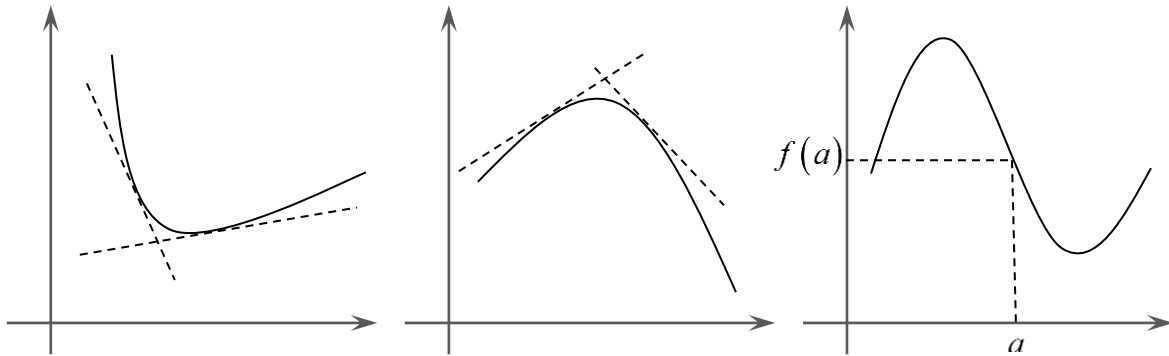
$f''(-1) = \frac{6(-1+1)}{(-1)^4} = \frac{0}{1} = 0$. Por tanto, de $x = -1$ no podemos afirmar nada, pues la segunda derivada en este

punto no es ni mayor ni menor que cero, sino que es exactamente igual a cero. Es probable que sea un punto de inflexión, cuestión que veremos en la próxima sección.

$f''(2) = \frac{6(2+1)}{2^4} = \frac{18}{16} > 0$. Por el criterio visto más arriba, deducimos que $x = 2$ es un mínimo relativo.

Curvatura. Puntos de inflexión

Una función se dice **cóncava** en un intervalo, si en dicho intervalo las tangentes a la gráfica quedan por debajo de la misma. En caso contrario se dice **convexa**. Si en un punto determinado cambia la curvatura, es decir, a la izquierda del mismo la función es cóncava y a la derecha convexa, o al revés, dicho punto recibe el nombre de **punto de inflexión**.



La primera de las funciones de la figura anterior es cóncava, la segunda es convexa y la tercera presenta un punto de inflexión en el punto $x = a$.

En el siguiente resultado se pone de manifiesto la relación entre las derivadas, la curvatura y los puntos de inflexión.

Supongamos que f es una función definida en un intervalo. Entonces:

- Si $f''(x) > 0$ en todo punto x del intervalo, entonces f es cóncava en ese intervalo.
- Si $f''(x) < 0$ en todo punto x del intervalo, entonces f es convexa en ese intervalo.
- Si f tiene un punto de inflexión en un punto a del intervalo, entonces $f''(a) = 0$.

Ejemplo

Estudiar la monotonía, los extremos relativos, la curvatura y los puntos de inflexión de la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

El dominio de f es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ (-1 y 1 anulan el denominador). La derivada de f es:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

Es claro que los puntos de discontinuidad de f' son los mismos que los de f (-1 y 1 son otra vez los números que anulan el denominador de f'). Veamos ahora los puntos que anulan la derivada:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Así pues, los puntos obtenidos para dividir la recta real son -1 y 1 (que no pertenecían al dominio) y estos últimos: 0 , $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$.

Elaboremos una tabla como hicimos en el ejemplo anterior y estudiemos los signos de la derivada en cada uno de los intervalos.

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
f'	+	0	-	$\cancel{\neq}$	-	0	-	$\cancel{\neq}$	-	0	+
f	$\uparrow\uparrow$	máximo	$\downarrow\downarrow$	$\cancel{\neq}$	$\downarrow\downarrow$?	$\downarrow\downarrow$	$\cancel{\neq}$	$\downarrow\downarrow$	mínimo	$\uparrow\uparrow$

Los signos se han obtenido dando un valor cualquiera a f' dentro del intervalo. Por ejemplo, para $(-\infty, -\sqrt{3})$,

$$\text{tomamos, por ejemplo, } x = -2 \text{ y evaluamos la derivada en este punto: } f'(-2) = \frac{(-2)^4 - 3(-2)^2}{((-2)^2 - 1)^2} = \frac{16 - 12}{9} = \frac{4}{9} > 0.$$

Obsérvese que el signo del denominador, al ser un cuadrado, será siempre positivo. Por tanto, bastaría con estudiar, en este caso, el signo del numerador. Hay que destacar que lo importante no es el resultado en sí, sino su signo.

Deducimos pues de la tabla anterior que f es estrictamente creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, y estrictamente decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1)$. Además, en $x = -\sqrt{3}$ la función cambia de ser estrictamente

creciente a ser estrictamente decreciente, lo que significa que $x = -\sqrt{3}$ es un máximo relativo. Puesto que

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{-3\sqrt{3}}{2}, \text{ las coordenadas del máximo relativo son } \left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

En $x = \sqrt{3}$ la función cambia de ser estrictamente decreciente a ser estrictamente creciente, por lo que $x = \sqrt{3}$ es

$$\text{un mínimo relativo. Como } f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ las coordenadas del mínimo relativo son } \left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

Obsérvese que, excluyendo los puntos de discontinuidad de la función, queda un punto, $x = 0$, en el que no cambia la monotonía de la función. En estos casos es probable que tal punto sea un punto de inflexión de la función.

Hasta aquí, el proceso es muy parecido al realizado en el ejemplo anterior. El estudio de la curvatura (concavidad y convexidad) y los puntos de inflexión de una función f es similar al de la monotonía y los extremos relativos.

Dividimos otra vez la recta real \mathbb{R} en intervalos. En este caso los puntos que se excluyen, y que separarán cada uno de los intervalos, son los puntos de discontinuidad de f , f' y f'' , así como los puntos que anulan la segunda derivada. Es posible demostrar que en estos intervalos el signo de f'' no cambia.

A continuación, como en el caso de la monotonía, se construye una tabla donde las columnas serán dichos intervalos y los puntos que los separan. Añadimos una fila para los signos de f'' y otra para la curvatura de f .

Finalmente, en los puntos que separan los intervalos, si no son puntos de discontinuidad de f , observamos la curvatura de f a la izquierda y a la derecha. Si hay cambio de convexa a cóncava o de cóncava a convexa, tendremos un punto de inflexión en dicho punto.

Obtengamos pues la derivada segunda de f :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{(x^2 - 1)[(4x^3 - 6x)(x^2 - 1) - 4x(x^4 - 3x^2)]}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{4x^5 - 4x^3 - 6x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} \end{aligned}$$

Los puntos de discontinuidad vuelven a ser -1 y 1 . Veamos dónde se anula la segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ x^2 + 3 = 0 \end{cases} \quad (x^2 + 3 = 0 \text{ no tiene solución real}).$$

La tabla que resulta ahora es la siguiente:

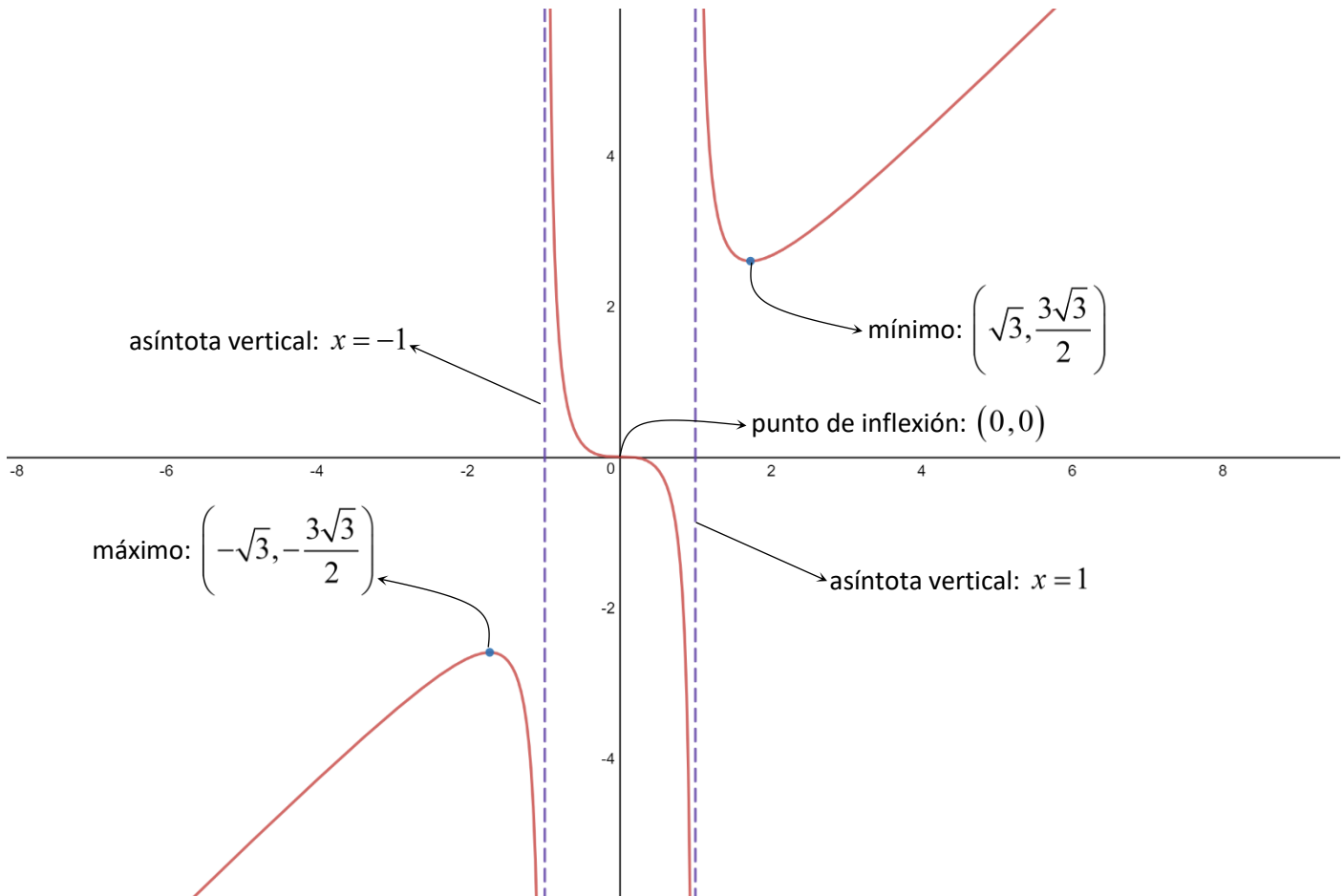
	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f''	$-$	no existe	$+$	0	$-$	no existe	$+$
f	convexa	no existe	cóncava	punto de inflexión	convexa	no existe	cóncava

Por tanto, f es cóncava en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y convexa en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$. En $x=0$ la función pasa de ser cóncava a ser convexa, luego $x=0$ es un punto de inflexión. Como $f(0)=0$, las coordenadas del punto de inflexión son $(0,0)$ (el origen de coordenadas).

Tras el estudio realizado y teniendo en cuenta que $x=-1$ y $x=1$ son sendas asíntotas verticales, ya que

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -1^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -1^+ \end{cases}; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 1^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 1^+ \end{cases},$$

podemos realizar la representación gráfica de la función.



Criterio de la tercera derivada para la obtención de puntos de inflexión

Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

En el ejemplo anterior, es posible demostrar que la tercera derivada de f es $f'''(x) = -\frac{6(x^4 + 6x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4}$ (¿te atreves

a comprobarlo?). Se sabe que el "candidato" a punto de inflexión (por anular la segunda derivada) es $x=0$. Como resulta que $f'''(0) = -\frac{6 \cdot 1}{(-1)^4} = -6 \neq 0$, deducimos que, efectivamente, $x=0$ es un punto de inflexión. Además,

como $f(0)=0$, las coordenadas del punto de inflexión son $(0,0)$.

Los criterios de la segunda derivada para la obtención de extremos relativos y de la tercera derivada para la obtención de puntos de inflexión se pueden generalizar, de tal manera que las derivadas pares sirven para obtener extremos relativos (siempre que no se anule la última y se anulen las anteriores) y las derivadas impares se usan para la obtención de puntos de inflexión (siempre que no se anule la última de ellas y se anulen las anteriores).

Optimización de funciones

Optimizar un proceso es conseguir que una magnitud sea lo mayor o lo menor posible cuando está sujeta a unas condiciones. Para ello, es preciso encontrar el máximo o el mínimo de una función.

Para resolver un problema de optimización tenemos que expresar el proceso que queremos maximizar o minimizar mediante una función. A veces, esta función se da explícitamente en el enunciado del problema. Pero en muchas ocasiones no, y seremos nosotros los encargados de traducir el proceso a una función. Muchas veces, esta función depende de dos variables o magnitudes (x e y), con lo que la función la podremos expresar así: $f(x, y)$. En estos casos hemos de buscar también en el enunciado alguna restricción que relacione una magnitud con la otra, de tal manera que podamos expresar x en función de y , o y en función de x . Al sustituir esta restricción en $f(x, y)$, la función dependerá de una sola variable. Ahora podremos hallar, usando las derivadas, los máximos o mínimos de esta función, que es justo lo que se debe de pedir en el enunciado del problema. Lo mejor es verlo con un par de ejemplos.

Ejemplos

1. El producto de dos números es 125. Halla los números de forma que el cuadrado del primero más el doble del segundo sea mínimo.

Queremos hallar dos números. Llamémoslos x e y . Obtenemos la expresión de la función: $f(x, y) = x^2 + 2y$. Los dos números están relacionados, según el enunciado del problema, mediante la condición $xy = 125$. De aquí, despejando y , obtenemos que $y = \frac{125}{x}$. Sustituyendo este valor en la función original obtenemos la función

$$f(x) = x^2 + \frac{250}{x}, \text{ cuya derivada es } f'(x) = 2x - \frac{250}{x^2}. \text{ Igualando a cero obtenemos los posibles extremos:}$$
$$2x - \frac{250}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 250 = 0 \Rightarrow x^3 = 125 \Rightarrow x = 5.$$

Usamos el criterio de la segunda derivada para decidir si $x = 5$ es un máximo o un mínimo.

$$f''(x) = 2 - 250 \cdot \left(-\frac{1}{x^4} \cdot 2x \right) = 2 + \frac{250}{x^3}; \quad f''(5) = 2 + \frac{500}{5^3} = 2 + \frac{500}{125} = 2 + 4 = 6 > 0$$

Por tanto $x = 5$ es un mínimo, y los dos números que se piden en el enunciado son $x = 5$, $y = \frac{125}{5} \Rightarrow y = 25$.

2. De entre todas las latas cilíndricas de aluminio con una capacidad de 333 ml (o cm^3), ¿cuál es la que menos costes de producción tiene?

La lata cilíndrica más barata será la que menor superficie tenga. Si llamamos r al radio de la base del cilindro y h a su altura, el área lateral del cilindro viene dada por $2\pi rh$ y el área de la base por πr^2 . Por tanto, el área total A del cilindro vendrá dada por la siguiente expresión: $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

Como el volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$ y la capacidad de las latas es de 333 cm^3 , tenemos que $\pi r^2 h = 333$ y de aquí, despejando h , tenemos $h = \frac{333}{\pi r^2}$. Sustituyendo este valor en la expresión del área tenemos la siguiente

función, que depende únicamente del radio de la base: $A = 2\pi r \frac{333}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{666}{r} + 2\pi r^2$. Derivando e

igualando a cero: $A' = -\frac{666}{r^2} + 4\pi r = 0 \Rightarrow -666 + 4\pi r^3 = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{666}{4\pi} \Rightarrow r \cong 3,76 \text{ cm}$. La segunda derivada

de la función área es $A'' = \frac{1332}{r^3} + 4\pi$. Si sustituimos r por $3,76$ tenemos $A'' = 37,62 > 0$, lo que indica que

$3,76$ es un mínimo. Por tanto, el mínimo coste es para $r = 3,76 \text{ cm}$ y $h = \frac{333}{\pi 3,76^2} \Rightarrow h \cong 7,5 \text{ cm}$.

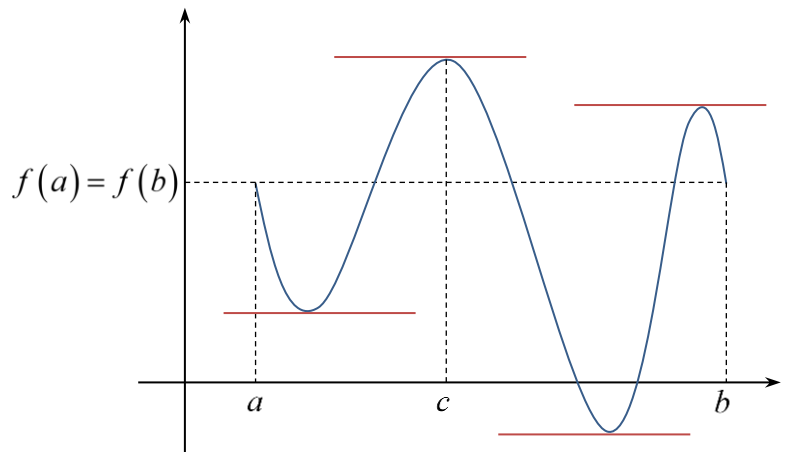
El teorema de Rolle

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto (a, b) y cumpliendo que $f(a) = f(b)$. Entonces existe algún punto c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Demostración.

Como f es una función continua en $[a, b]$, por el teorema de Weierstrass alcanza su máximo y su mínimo absolutos en ese intervalo. Distinguiremos dos casos:

- 1) El máximo y el mínimo absolutos están uno en a y otro en b . Como $f(a) = f(b)$, el máximo y el mínimo coinciden, luego la función es constante en todo el intervalo y su derivada es cero no solo en algún punto, sino en todo el intervalo.
- 2) f alcanza el máximo o el mínimo en un punto c distinto de los extremos del intervalo. Como f es derivable en c , se cumple que $f'(c) = 0$.



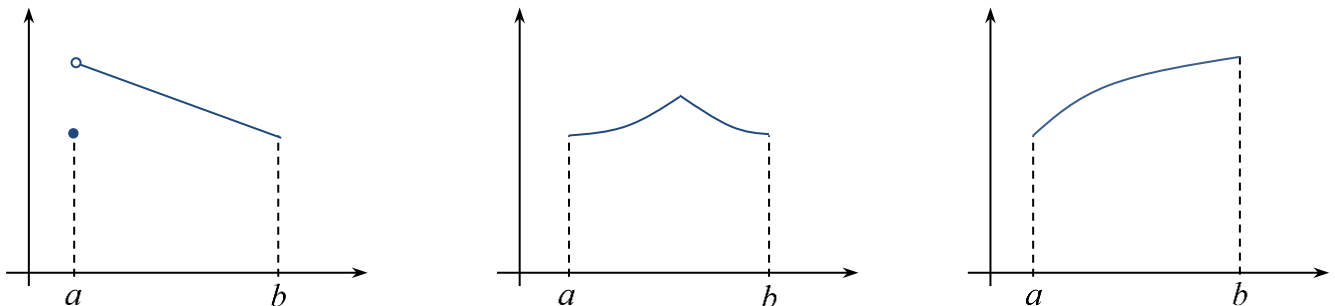
Desde el punto de vista geométrico (ver figura de la derecha), el teorema de Rolle viene a expresar que, si las imágenes de una función derivable coinciden en los extremos de un intervalo, entonces hay algún punto en el interior del intervalo en el que la recta tangente es horizontal (paralela al eje X).

Ejemplo

Comprobar que la función $f(x) = -2x^3 + 8x + 5$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 2]$. Hallar el valor de $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

La función f cumple las hipótesis del teorema de Rolle ya que, al ser polinómica, es continua y derivable no solamente en el intervalo $[0, 2]$, sino en todo \mathbb{R} . Además $f(0) = f(2) = 5$. Esto quiere decir que existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Además, podemos encontrar exactamente ese valor de c . Como $f'(x) = -6x^2 + 8$, entonces resulta que: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Efectivamente, $c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cong 1,15 \in (0, 2)$ y $f'(c) = 0$.

Es importante darse cuenta de que en el momento en que no se cumplan algunas de las condiciones del teorema de Rolle, dicho teorema no será cierto. Esto puede ocurrir cuando ocurran algunas de las siguientes situaciones:



- 1) f no es continua en algún punto de $[a, b]$.
 - 2) f es continua en $[a, b]$, pero no es derivable en algún punto del abierto (a, b) .
 - 3) f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , pero las imágenes en los extremos del intervalo no son iguales.
- Observa que en ninguno de los tres casos anteriores existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

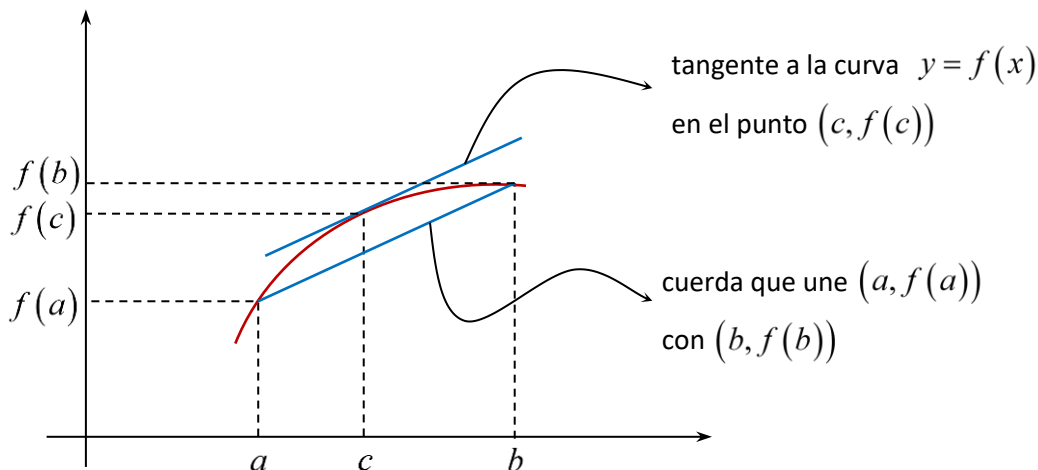
El teorema del valor medio

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el abierto (a, b) . Entonces existe por lo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Demostración.

Consideremos la función $g(x) = (b - a)f(x) - (f(b) - f(a))x$, la cual es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , por serlo f . Además $g(a) = g(b)$ (¡compruébese!). Por el teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Puesto que $g'(x) = (b - a)f'(x) - (f(b) - f(a))$, la consecuencia $g'(c) = 0$ del teorema de Rolle equivale a $(b - a)f'(c) - (f(b) - f(a)) = 0$, es decir a $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, que es justo lo que se quería demostrar.

Geoméricamente, el teorema del valor medio asegura que existe al menos un punto c , comprendido entre a y b , tal que la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ es paralela a la cuerda que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$. Podemos observarlo en la figura siguiente.



Ejemplo

Calcular un punto del intervalo $[0, 2]$ en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ sea paralela a la cuerda (o segmento) que une los puntos de la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$ y $x = 2$.

La función f es claramente continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$. La derivada de f es $f'(x) = 6x + 2$. Según el teorema del valor medio, existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$, es decir, tal que $6c + 2 = \frac{17 - 1}{2}$. De aquí podemos despejar c : $6c + 2 = 8 \Rightarrow 6c = 6 \Rightarrow c = 1$. Como $f(1) = 6$, podemos asegurar que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 6)$ es paralela a la cuerda que une a los puntos $(0, 1)$ y $(2, 17)$.

Podemos hallar ambas rectas y convencernos de que, efectivamente, son paralelas.

La recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 6)$ es: $y - 6 = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 6 = 8(x - 1) \Rightarrow y = 8x - 2$

La cuerda que une a los puntos $(0, 1)$ y $(2, 17)$ tiene pendiente $m = \frac{17 - 1}{2 - 0} = \frac{16}{2} = 8$. Luego la ecuación de esta

cuerda es: $y - 1 = 8(x - 0) \Rightarrow y = 8x + 1$.

Una experiencia aclaradora (y motivadora) es usar cualquier aplicación gráfica (desmos, por ejemplo) para visualizar la gráfica de la función f , los puntos obtenidos y las dos rectas calculadas.